Universidad del Atlántico
MATUA
Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 19–32
Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. III , Nº 2, (2016)

Una caracterización para la nulidad y el rango de combinaciones lineales de dos matrices idempotentes

A characterization for the nullity and rank of linear combinations of two idempotent matrices.

Carlos de Oro Aguado

Grupo de investigación en Matemáticas Uninorte, Barranquilla-Colombia

cdeoroaguado@gmail.com

Resumen

En este artículo mostraremos detalladamente la equivalencia que existe entre la no singularidad de combinaciones lineales de dos matrices idempotentes y la no singularidad de su suma. Además generalizamos lo anteriormente dicho a través de la nulidad y el rango de una matriz, y en especial demostrando que la nulidad y el rango de cualquier combinación lineal no trivial de dos matrices idempotentes es constante.

Palabras claves: Singularidad, combinación lineal, matrices idempotentes, nulidad, rango.

Abstract

In this article we will show in detail the equivalence between the nonsingularity of linear combinations of two idempotent matrices and nonsingularity of their sum. In addition we generalize the above said through nullity and rank of a matrix, and especially demonstrating that the nullity and rank of any nontrivial linear combination of two idempotent matrices is constant.

Keywords: Singularity, linear combination, idempotent matrices, nullity, range.

1. Introducción

En el año 1999, J. Grob y G. Trenkler en [1] demuestran que si P_1, P_2 son matrices cuadradas idempotentes tales que $P_1 - P_2$ es no singular, entonces $P_1 + P_2$ es no singular.
Este resultado se fundamentó con base al rango de matrices desarrollados por G. Marsaglia y G.P.H. Styan en [2] del año 1974. Mientras J.J. Koliha, V. Rakočević y I. Straškrabra en [3] del año 2004, obtuvieron nuevas pruebas más sencillas, sin hacer uso de la teoría de rango. Además fijan explícitamente una condición que combinada con la no singularidad de $P_1 + P_2$ implica la no singularidad de $P_1 - P_2$.

Despues, J.K. Baksalary y O.M.Baksalary en [4], en el año 2004 demuestran que si P_1, P_2 son matrices cuadradas idempotentes, entonces la no singularidad de $P_1 + P_2$ equivale a la no singularidad de cualquier combinación lineal $c_1P_1+c_2P_2$, donde c_1 y c_2 son números complejos distintos de cero, y tales que $c_1+c_2 \neq 0$. En este artículo se realizarán detalles importantes para obtener un resultado más general que el obtenido por J.K. Baksalary y O.M. Baksalary en su artículo anteriormente mencionado, y además se demostrará que la nulidad y el rango de $c_1P_1 + c_2P_2$ es constante.

2. Preliminares

Definición 2.1. *Sean A y B conjuntos. Una función f de A a B, denotada por $f : A \longrightarrow B$, es un subconjunto $F \subseteq A \times B$, tal que para todo $a \in A$, hay uno y sólo un par de la forma (a, b) en F. El conjunto A es llamado el dominio de la función y el conjunto B es llamado el codominio de la función f.*

Definición 2.2. *Una matriz A de orden $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \cdot n$ números dispuestos en m renglones y n columnas.*

Definición 2.3. *Una matriz cuadrada A en $M_n(\mathbb{C})$ se denomina idempotente si $A^2 = A$. El conjunto de todas las matrices idempotentes lo notaremos como $\mathcal{P}$.*

Definición 2.4. *Sea A una matriz de orden $m \times n$. El conjunto*

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \ Ax = \mathbf{0}\},$$

denotado $\mathcal{N}(A)$ se denomina espacio nulo de A. La dimensión de $\mathcal{N}(A)$ se denomina nulidad de A y se denota $nul(A)$.

Definición 2.5. *Sea A una matriz de orden $m \times n$. Entonces la imagen de A, denotada por $\mathcal{R}(A)$, esta dada por*

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{C}^n : \ Ax = y, \ \ \textit{para alguna } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

La dimensión de $\mathcal{R}(A)$ se denomina rango de A y se denota $rk(A)$.

Definición 2.6. *Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ se dice no singular si $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.*

Teorema 2.1. *Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Entonces A es no singular si, y sólo si, A es invertible.*

Demostración: [$\Leftarrow$] Si A es invertible, entonces el sistema $Ax = 0$ tiene una solución única, $x = 0$. Luego $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, es decir, A es no singular.
[$\Rightarrow$] Si A es no singular, entonces $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, es decir, la única solución del sistema homogeneo $Ax = 0$ es $x = 0$, de donde A es invertible. □

Definición 2.7. *Sean U y V dos espacios vectoriales. Se dice que la función*

$$T : V \longrightarrow U$$

es una transformación lineal si

1. *T preserva suma, es decir, $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \ \forall \ v_1, \ v_2 \in V$.*
2. *T preserva producto por escalares, es decir, $T(cv) = cT(v), \ \forall \ v \in V, \ \forall \ c \in \mathbb{R}$.*

Definición 2.8. *Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. El núcleo de T denotado $\mathcal{N}(T)$, es el conjunto de todos los vectores en V cuya imagen bajo T es 0 en W. Es decir,*

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V : \ T(v) = 0_W\}.$$

Definición 2.9. *Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. La imagen de T, denotada $\mathcal{R}(T)$, es el conjunto de todos los vectores de W que son imagen de los vectores de V bajo T. Es decir,*

$$\mathcal{R}(T) = \{T(v) : \ v \in V\} = \{w \in W : w = T(v), \ \textit{para algún } v \in V\}.$$

Teorema 2.2. *Sea A una matriz de orden $m \times n$ y sea $T := T_A$ una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$ definida por $T(v) = Av$. Entonces:*

i) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A)$

ii) $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(A)$.

Demostración:

i) $\mathcal{N}(T) = \{v \in \mathbb{C}^n : \ T(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{C}^n : \ Av = 0\} = \mathcal{N}(A)$.

ii) $\mathcal{R}(T) = \{w \in \mathbb{C}^n : \ w = T(v), \ \textit{para algún } v \in V\} = \{w \in \mathbb{C}^n : \ w = Av, \ \textit{para algún } v \in V\} = \mathcal{R}(A)$. □

En el teorema anterior podemos decir

$$\begin{aligned} nul(A) &= dim(\mathcal{N}(A)) = dim(\mathcal{N}(T)) = nul(T) \\ rk(A) &= dim(R(A)) = dim(\mathcal{R}(T)) = rk(T). \end{aligned}$$

Nota. *Introduzcamos la siguiente notación: Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ y $W \subseteq \mathbb{C}^n$, entonces definimos el conjunto AW como sigue*

$$AW := \{y \in \mathbb{C}^n : y = Ax, \textit{para algún } x \in W\}$$

Teorema 2.3. *Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal de un espacio de dimensión finita V a un espacio vectorial W. Entonces $rk(T) + nul(T) = dim(V)$.*

Demostración: Vease en [6], pág. 349. □

Definición 2.10. *Una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ se denomina isomorfismo si es inyectiva y sobreyectiva. Si V y W son dos espacios vectoriales tales que existe un isomorfismo de V a W, entonces decimos que V es isomorfo a W y escribimos $V \cong W$.*

Teorema 2.4. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces V es isomorfo a W, si y sólo si, $dim(V) = dim(W)$.*

Demostración: Vease en [6], pág. 512. □

Lema 2.1. *Sea B una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. Si B es inyectiva, entonces $dom(B) \cong \mathcal{R}(B)$.*

Demostración: Definamos

$$\begin{aligned} \varphi : dom(B) &\longrightarrow \mathcal{R}(B) \\ x \quad &\longmapsto \varphi(x) = Bx \end{aligned}$$

i) φ esta bién definida. Pues si $x = y$, donde $x, \ y \in dom(B)$, entonces

$$\varphi(x) = Bx = By = \varphi(y).$$

ii) φ es inyectiva. En efecto: Supongamos que $\varphi(x) = \varphi(y)$, es decir, $Bx = By$. Como B es inyectiva, se tiene que $x = y$. Por lo tanto φ es inyectiva.

iii) φ es sobreyectiva. En efecto: Sea $y \in \mathcal{R}(B)$, entonces existe $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Bx = y$. Es claro que $x \in dom(B)$ y $\varphi(x) = y$. Por lo tanto φ es sobreyectiva.

En consecuencia, por i), ii), y iii) podemos concluir que $dom(B) \cong \mathcal{R}(B)$. □

Teorema 2.5. *Una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es inyectiva, si y sólo si, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$*

Demostración: Vease en [6], pág. 517. □

3. No singularidad de combinaciones lineales de dos matrices idempotentes

Teorema 3.1. *Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$. Si una combinación lineal $\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2$ es no singular para algunos $\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $\widetilde{c_1} + \widetilde{c_2} \neq 0$, entonces $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $c_1 + c_2 \neq 0$.*

Demostración: Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $c_1 + c_2 \neq 0$. Veamos que $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular. Para esto basta mostrar que $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) = \{0\}$. En efecto: sea

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) &\Longrightarrow (c_1P_1 + c_2P_2)x = 0 \Longrightarrow c_1P_1x + c_2P_2x = 0 \\ &\Longrightarrow c_1P_1x = -c_2P_2x. \end{aligned} \tag{1}$$

De la ec. (1) tenemos que:

$$\begin{aligned} c_1P_1x = c_1P_1^2x = P_1(c_1P_1x) = P_1(-c_2P_2x) &= -c_2P_1P_2x \quad \text{y} \\ -c_2P_2x = -c_2P_2^2x = P_2(-c_2P_2x) = P_2(c_1P_1x) &= c_1P_2P_1x \end{aligned}$$

y nuevamente, por la ec. (1) se sigue que,

$$c_1P_1x = -c_2P_2x = -c_2P_1P_2x = c_1P_2P_1x. \tag{2}$$

Así,

$$P_1x = P_2P_1x \quad \text{y} \quad P_2x = P_1P_2x. \tag{3}$$

De otra parte,

$$\begin{aligned} (\widetilde{c_1} + \widetilde{c_2})(\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2)x &= \widetilde{c_1}^2P_1x + \widetilde{c_1}\widetilde{c_2}P_2x + \widetilde{c_2}\widetilde{c_1}P_1x + \widetilde{c_2}^2P_2x \\ &= \widetilde{c_1}^2P_1x + \widetilde{c_1}\widetilde{c_2}P_1P_2x + \widetilde{c_2}\widetilde{c_1}P_2P_1x + \widetilde{c_2}^2P_2x \qquad \text{por ec. (3)} \\ &= (\widetilde{c_1}^2P_1^2 + \widetilde{c_1}\widetilde{c_2}P_1P_2 + \widetilde{c_2}\widetilde{c_1}P_2P_1 + \widetilde{c_2}^2P_2^2)x \\ &= [\widetilde{c_1}P_1(\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2) + \widetilde{c_2}P_2(\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2)]x \\ &= (\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2)^2x. \end{aligned}$$

Como $\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2$ es no singular; por teorema 2.1 se tiene que $\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2$ es invertible, de modo que

$$(\widetilde{c_1} + \widetilde{c_2})x = (\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2)x. \tag{4}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} (\widetilde{c_1} + \widetilde{c_2})P_1x &= P_1(\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2)x \qquad \text{por ec. (4)} \\ &= \widetilde{c_1}P_1^2x + \widetilde{c_2}P_1P_2x \\ &= \widetilde{c_1}P_1x + \widetilde{c_2}P_1P_2x \end{aligned}$$

luego

$$\widetilde{c_1}P_1x + \widetilde{c_2}P_1x = \widetilde{c_1}P_1x + \widetilde{c_2}P_1P_2x \Longrightarrow \widetilde{c_2}P_1x = \widetilde{c_2}P_1P_2x \Longrightarrow P_1x = P_1P_2x. \tag{5}$$

Ahora

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2)P_1x &= c_1P_1x + c_2P_1x \\ &= c_1P_1x + c_2P_1P_2x && \text{por ec. (5)} \\ &= c_1P_1x - c_1P_1x && \text{por ec. (2)} \\ &= 0\end{aligned}$$

de donde, $P_1x = 0 = P_2x$; ya que $c_1 + c_2 \neq 0$, por hipótesis. Luego por la ec. (4)

$$(\widetilde{c_1} + \widetilde{c_2})x = (\widetilde{c_1}P_1 + \widetilde{c_2}P_2)x = \widetilde{c_1}P_1x + \widetilde{c_2}P_2x = 0,$$

pero por hipótesis $\widetilde{c_1} + \widetilde{c_2} \neq 0$, luego $x = 0$. De esta manera,

$$\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) = \{0\},$$

y así, por definición 2.6, $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular. □

Teorema 3.2. *Sean P_1, $P_2 \in \mathcal{P}$ y c_1, $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *$P_1 - P_2$ es no singular.*

b) *$c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1P_2$ son no singulares.*

Demostración: [⇒] Supongamos que $P_1 - P_2$ es no singular; por teorema 2.1, $P_1 - P_2$ es invertible. Veamos que $c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1P_2$ son no singulares. En efecto: Si $x \in \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ se sigue que $(c_1P_1 + c_2P_2)x = 0$, de la demostración del teorema anterior es valida la ecuación (3), es decir,

$$P_1x = P_2P_1x \quad \text{y} \quad P_2x = P_1P_2x.$$

Además, si $(I - P_1P_2)x = 0$, tenemos que $x - P_1P_2x = 0$, es decir,

$$P_1P_2x = x. \tag{6}$$

De la ec. (6) tenemos que,

$$P_1x = P_1(P_1P_2x) = P_1^2P_2x = P_1P_2x.$$

y así,

$$P_2x = P_2(P_1P_2x) = P_2P_1x. \tag{7}$$

Entonces

$$\begin{aligned}(P_1 - P_2)x &= P_1x - P_2x \\ &= P_1x - P_2P_1x && \text{por ec. (7)} \\ &= P_1x - P_1x && \text{por ec. (3)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pero $P_1 - P_2$ es invertible, luego $x = 0$. Por lo tanto

$$\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) = \{0\} \text{ y } \mathcal{N}(I - P_1P_1) = \{0\}.$$

De esta manera, por definición 2.6, $c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1P_2$ son no singulares.

[⇐] Supongamos que $c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1P_2$ son no singulares, por teorema 2.1, $c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1P_2$ son invertibles. Ahora demostraremos que $P_1 - P_2$ es no singular. En efecto: sea

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(P_1 - P_2) &\Longrightarrow (P_1 - P_2)x = 0 \\ &\Longrightarrow P_1x = P_2x \end{aligned} \tag{8}$$

Ahora

$$\begin{aligned} P_1x = P_1(P_1x) &= P_1P_2x && \text{por ec. (8)} \\ \therefore\ P_1x &= P_1P_2x \end{aligned} \tag{9}$$

y así,

$$\begin{aligned} P_2x = P_2(P_2x) &= P_2(P_1x) && \text{por ec. (8)} \\ &= P_2P_1P_2x && \text{por ec. (9)} \\ \therefore\ P_2x &= P_2P_1P_2x. \end{aligned} \tag{10}$$

De otra parte,

$$\begin{aligned} (c_1P_1 + c_2P_2)(I - P_1P_2)x &= c_1P_1x + c_2P_2x - c_1{P_1}^2P_2x - c_2P_2P_1P_2x \\ &= c_1P_1x + c_2P_2x - c_1P_1P_2x - c_2P_2P_1P_2x \\ &= c_1P_1x + c_2P_2x - c_1P_1x - c_2P_2x, \quad \text{por las ec. (9) y ec. (10)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $I - P_1P_2$ y $c_1P_1 + c_2P_2$ son invertibles, entonces

$$x = (I - P_1P_2)^{-1}(c_1P_1 + c_2P_2)^{-1}(c_1P_1 + c_2P_2)(I - P_1P_2) = 0$$

Así, $\mathcal{N}(P_1 - P_2) = \{0\}$. Por definición 2.6, $P_1 - P_2$ es no singular. □

Teorema 3.3. *Sean P_1, $P_2 \in \mathcal{P}$ y c_1, $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $c_1 + c_2 \neq 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $c_1P_1 + c_2P_2$ *es no singular.*

b) $\mathcal{R}[P_1(I - P_2)] \cap \mathcal{R}[P_2(I - P_1)] = \{0\}$ *y* $\mathcal{N}(P_1) \cap \mathcal{N}(P_2) = \{0\}$

Demostración: [⇒] Supongamos que $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular. Por el teorema 2.1, $c_1P_1 + c_2P_2$ es invertible. Sea

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(P_1) \cap \mathcal{N}(P_2) &\Longrightarrow x \in \mathcal{N}(P_1) \text{ y } x \in \mathcal{N}(P_2) \\ &\Longrightarrow P_1x = 0 \text{ y } P_2x = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Luego por la ec. (11), $(c_1P_1 + c_2P_2)x = c_1P_1x + c_2P_2x = 0$. Como $c_1P_1 + c_2P_2$ es invertible, entonces $x = 0$. Por lo tanto $\mathcal{N}(P_1) \cap \mathcal{N}(P_2) = \{0\}$.

De otra parte, sea

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{R}[P_1(I-P_2)] \cap \mathcal{R}[P_2(I-P_1)] &\Longrightarrow x \in \mathcal{R}[P_1(I-P_2)] \text{ y } x \in \mathcal{R}[P_2(I-P_1)], \\ &\Longrightarrow \exists_n\ s, u \in \mathbb{C}^n : P_1(I-P_2)s = x \text{ y } \ P_2(I-P_1)u = x \end{aligned} \tag{12}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} P_1 x &= P_1[P_1(I-P_2)s] && \text{por ec. (12)} \\ &= {P_1}^2(I-P_2)s = P_1(I-P_2)s \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P_2 x &= P_2[P_2(I-P_1)u] && \text{por ec. (12)} \\ &= {P_2}^2(I-P_1)u = P_2(I-P_1)u. \end{aligned}$$

Y nuevamente, por ec. (12)

$$x = P_1 x = P_2 x = P_1(I-P_2)s, \quad \text{donde } s \in \mathbb{C}^n. \tag{13}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} c_1(c_1P_1 + c_2P_2)x &= c_1(c_1x + c_2x) && \text{por ec. (13)} \\ &= (c_1+c_2)c_1x \\ &= (c_1+c_2)(c_1P_1(I-P_2)s) && \text{por ec. (13)} \\ &= (c_1+c_2)(c_1P_1(I-P_2)s + c_2(P_2-P_2)s) \\ &= (c_1+c_2)(c_1P_1(I-P_2)s + c_2(P_2-{P_2}^2)s) \\ &= (c_1+c_2)(c_1P_1 + c_2P_2)(I-P_2)s). \end{aligned}$$

Como $c_1P_1 + c_2P_2$ es invertible se tiene que

$$c_1x = (c_1+c_2)(I-P_2)s. \tag{14}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} c_1x &= c_1P_1x && \text{por ec. (13)} \\ &= P_1(c_1+c_2)(I-P_2)s && \text{por ec. (14)} \\ &= (c_1+c_2)P_1(I-P_2)s \\ &= (c_1+c_2)x && \text{por ec. (13)} \\ &= c_1x + c_2x. \end{aligned}$$

Entonces $c_2x = 0$, de modo que $x = 0$. Por lo tanto $\mathcal{R}[P_1(I-P_2)] \cap \mathcal{R}[P_2(I-P_1)] = \{0\}$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\mathcal{R}[P_1(I-P_2)] \cap \mathcal{R}[P_2(I-P_1)] = \{0\}$ y $\mathcal{N}(P_1) \cap \mathcal{N}(P_2) = \{0\}$. Sea $x \in \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ entonces $(c_1P_1 + c_1P_2)x = 0$, de modo que se cumplen las ecuaciones (2) y (3).

Ahora,

$$\begin{aligned} (c_1+c_2)P_1x &= c_1P_1x + c_2P_1x \\ &= -c_2P_1P_2x + c_2P_1x && \text{por ec. (2)} \\ &= c_2P_1(I-P_2)x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(c_1+c_2)P_1x &= c_1P_1x + c_2P_1x \\ &= -c_2P_2x + c_2P_1x && \text{por ec. (2)} \\ &= -c_2P_2x + c_2P_2P_1x && \text{por ec. (2)} \\ &= -c_2P_2(I-P_1)x\end{aligned}$$

Entonces $P_1x \in \mathcal{R}[P_1(I-P_2)] \cap \mathcal{R}[P_2(I-P_1)]$, es decir, $P_1x = 0$.

De la ec. (3) tenemos que $P_2x = -\frac{c_1}{c_2}P_1x = 0$. Por lo tanto $x \in \mathcal{N}(P_1) \cap \mathcal{N}(P_2)$ de modo que $x = 0$.

Así, $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) = \{0\}$. Por definición 2.6, $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular.

Teorema 3.4 *Sean P_1, $P_2 \in \mathcal{P}$ y c_1, $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *$c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1$ es no singular.*

b) *$c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1 - P_2$ son no singulares.*

Demostración: [⇒] Probemos que

$$(c_1P_1 + c_2P_2)(I - P_1 - P_2)x = -(c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1)x. \tag{15}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}(c_1P_1 + c_2P_2)(I - P_1 - P_2)x &= c_1P_1x - c_1{P_1}^2x - c_1P_1P_2x + c_2P_2x - c_2P_2P_1x - c_2{P_2}^2x \\ &= c_1P_1x - c_1P_1x - c_1P_1P_2x + c_2P_2x - c_2P_2P_1x - c_2P_2x \\ &= -c_1P_1P_2x - c_2P_2P_1x \\ &= -(c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1)x.\end{aligned}$$

Ahora bien, supongamos que $c_1P_1P_2+c_2P_2P_1$ es no singular. Por teorema 2.1, $c_1P_1P_2+c_2P_2P_1$ es invertible. Si $x \in \mathcal{N}(c_1P_1+c_2P_2)$ entonces $(c_1P_1+c_2P_2)x = 0$. Además, si $x \in \mathcal{N}(I-P_1-P_2)$ se tiene que, $(I-P_1-P_2)x = 0$

Como $c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1$ es invertible y por la ecuación (15) entonces

$$x = -(c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1)^{-1}(c_1P_1 + c_2P_2)(I - P_1 - P_2)x = 0,$$

de modo que $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) = \{0\}$ y $\mathcal{N}(I - P_1 - P_2) = \{0\}$. Por lo tanto, $c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1 - P_2$ son no singulares.

[⇐] Supongamos que $c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1 - P_2$ son no singulares, por lo que $c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1 - P_2$ son invertibles. Sea $x \in \mathcal{N}(c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1)$, entonces $(c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1)x = 0$. Por la ecuación (15), es decir,

$$(c_1P_1 + c_2P_2)(I - P_1 - P_2)x = -(c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1)x,$$

y como $c_1P_1 + c_2P_2$ e $I - P_1 - P_2$ son invertibles, obtenemos

$$x = (I - P_1 - P_2)^{-1}(c_1P_1 + c_2P_2)^{-1}[-(c_1P_1 + c_2P_2)x] = 0.$$

Por lo tanto $\mathcal{N}(c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1) = \{0\}$. De esta manera, $c_1P_1P_2 + c_2P_2P_1$ es no singular. □

Teorema 3.5. *Sean P_1, $P_2 \in \mathcal{P}$ y c_1, $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $c_1 + c_2 \neq 0$. Entonces $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular, si y sólo si, $P_1 + P_2$ es no singular.*

Demostración: Supongamos que $P_1 + P_2$ es no singular. Como $\widetilde{c_1} = \widetilde{c_2} = 1$ y $\widetilde{c_1} + \widetilde{c_2} \neq 0$, del teorema 1.6 se sigue $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular.

Recíprocamente, supongamos que $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular. En particular, para $c_1 = c_2 = 1 \neq 0$, tenemos que $P_1 + P_2$ es no singular. □

4. La nulidad y el rango de combinaciones lineales de dos matrices idempotentes

En esta sección se extienten los resultados de no singularidad dados en la sección anterior, a la nulidad y rango de matrices idempotentes. También generalizaremos de manera precisa la no singularidad de combinaciones lineales de dos matrices idempotentes a traves del rango y la nulidad de una matriz. Además demostraremos que la nulidad y el rango de cualquier combinación lineal de dos matrices idempotentes es constante.

Lema 4.1. *Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$. Se define $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ como $T(x) = (I - P_1)P_2x$, entonces T es una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$.*

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{C}$ y α un escalar. Entonces

$$\checkmark T(x+y) = (I - P_1)P_2(x+y) = (I - P_1)P_2x + (I - P_1)P_2y = T(x) + T(y).$$
$$\checkmark T(\alpha x) = (I - P_1)P_2(\alpha x) = \alpha(I - P_1)P_2x = T(\alpha x).$$

Así, T es una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. □

Nota. *La transformación lineal T del lema anterior, es costumbre denotarla por $T = (I - P_1)P_2$. Así*

$$\begin{aligned} (I - P_1)\, P_2 : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto (I - P_1)\, P_2 x \end{aligned}$$

es una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$.

Lema 4.2. *Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$. Sea A la restricción de $(I - P_1)\, P_2$ a $\mathcal{N}(P_1) \subseteq \mathbb{C}^n$, de modo que A se define de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} A : \mathcal{N}(P_1) &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto Ax = (I - P_1)\, P_2 x. \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}[(I - P_1)\, P_2] \cap \mathcal{N}(P_1), \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}[(I - P_1)\, P_2\, (I - P_1)]$.

Demostración: Por lema 4.1, A es una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. Veamos que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}[(I - P_1)\, P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)$. En efecto: sea

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{N}(A) &\Longleftrightarrow z \in \mathcal{N}(A) \subseteq dom(A) = \mathcal{N}(P_1) \Longleftrightarrow z \in \mathcal{N}(P_1) \text{ y } Az = 0 \\ &\Longleftrightarrow z \in \mathcal{N}(P_1) \text{ y } (I - P_1)P_2z = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathcal{N}(P_1) \text{ y } z \in \mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \\ &\Longleftrightarrow z \in \mathcal{N}(P_1) \cap \mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \Longleftrightarrow z \in \mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \cap \mathcal{N}(P_1). \end{aligned}$$

Ahora bien, probemos que $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}[(I - P_1)\, P_2\, (I - P_1)]$. En efecto: sea

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{R}(A) &\Longrightarrow \exists x \in dom(A) = \mathcal{N}(P_1) \text{ tal que } Ax = y \\ &\Longrightarrow P_1x = 0 \text{ y } (I - P_1)P_2x = y \Longrightarrow x = (I - P_1)x \text{ y } (I - P_1)P_2x = y \\ &\Longrightarrow (I - P_1)P_2(I - P_1)x = y \Longrightarrow y \in \mathcal{R}[(I - P_1)P_2(I - P_1)]. \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}[(I - P_1)\, P_2\, (I - P_1)]$.

Sea

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{R}[(I - P_1)\, P_2\, (I - P_1)] &\Longrightarrow \exists x \in \mathbb{C}^n \text{ tal que } (I - P_1)\, P_2\, (I - P_1)\, x = y \\ &\Longrightarrow (I - P_1)\, P_2 z = y \text{ donde } z = (I - P_1)\, x. \end{aligned}$$

Como $P_1 z = P_1(I-P_1)x = \left(P_1 - P_1^2\right)x = (P_1-P_1)x = 0x = 0$, entonces $(I-P_1)P_2 z = y$, donde $z \in \mathcal{N}(P_1)$. En consecuencia $Az = y$, donde $z \in dom(A)$, es decir,$y \in \mathcal{R}(A)$. Por lo tanto $\mathcal{R}[(I-P_1)P_2(I-P_1)] \subseteq \mathcal{R}(A)$. De esta manera, $\mathcal{R}[(I-P_1)P_2(I-P_1)] = \mathcal{R}(A)$. □

Teorema 4.1 *Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tales que $c_1 + c_2 \neq 0$. Si A está definida como en el Lema 4.2, entonces $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ es isomorfo a $\mathcal{N}(A)$.*

Demostración: Denotemos por $\mathcal{N} := \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$. Esta demostración se realizara en dos partes.

Parte I: En primer lugar mostraremos que las siguientes afirmaciones son ciertas

i) $\mathcal{N} \cong (I-P_1)\mathcal{N}$

ii) $\mathcal{N}(A) \cong (cI - P_2)\mathcal{N}(A), \quad \forall c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Veamos que $\mathcal{N} \cong (I-P_1)\mathcal{N}$. De hecho, del Lema 4.2 tenemos que

$$\begin{aligned}(I-P_1) : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto (I-P_1)x\end{aligned}$$

es una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. Sea B la restricción de $(I-P_1)$ a $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{C}^n$, de modo que

$$\begin{aligned}B : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto Bx = (I-P_1)x.\end{aligned}$$

Sea $x \in \mathcal{N}(B)$, así que $x \in dom(B) = \mathcal{N}$ y $0 = Bx = (I-P_1)x$, de donde,

$$(c_1P_1 + c_2P_2)x = 0 \text{ y } P_1x = x. \tag{16}$$

Ahora

$$\begin{aligned}(c_1+c_2)P_2x &= c_1P_2x + c_2P_2x && \text{por ec. (16)} \\ &= c_1P_2(P_1x) + c_2(P_2^2)x \\ &= P_2(c_1P_1 + c_2P_2)x = 0. && \text{por ec. (16)}\end{aligned}$$

Como $c_1 + c_2 \neq 0$, entonces $P_2x = 0$, y así

$$\begin{aligned}c_1x &= c_1(P_1x) && \text{por ec. (16)} \\ &= c_1P_1x + c_2P_2x && \text{pues } P_2x = 0 \\ &= 0 && \text{por ec. (16).}\end{aligned}$$

Además, como $c_1 \neq 0$, tenemos que $x = 0$, de modo que $\mathcal{N}(B) = \{0\}$; y por teorema 2.6, B es inyectiva. Ahora como B es inyectiva, por el lema 2.1, $dom(B) \cong \mathcal{R}(B)$ y como $\mathcal{N} = dom(B) \cong \mathcal{R}(B) = (I-P_1)\mathcal{N}$. Entonces $\mathcal{N} \cong (I-P_1)\mathcal{N}$.

Demostremos ahora *ii*); para esto procedemos de manera parecida al caso anterior. Sea $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ dada. Notemos que

$$\begin{aligned}(cI-P_2) : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto (cI-P_2)x\end{aligned}$$

es una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. Sea C la restricción de $(cI - P_2)$ en $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{C}^n$, de modo que

$$\begin{aligned} C : \mathcal{N}(A) &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto Cx = (cI - P_2)x \end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{N}(C) = \{0\}$. En efecto: sea $x \in \mathcal{N}(C)$, entonces $x \in dom(C) = \mathcal{N}(A)$ y $0 = Cx = (cI - P_2)x$. Por el Lema 4.2, tenemos que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)$ entonces $x \in \mathcal{N}[(I - P_1)P_2]$ y $x \in \mathcal{N}(P_1)$, por lo tanto

$$(I - P_1)P_2x = 0, \quad P_1x = 0 \quad \text{y} \quad (cI - P_2)x = 0,$$

es decir,

$$P_2x = P_1P_2x \tag{17a}$$
$$P_2x = cx \tag{17b}$$
$$P_1x = 0 \tag{17c}$$

Usando las ecuaciones anteriores, tenemos que $P_2x = 0$, así que $P_2x = 0$; y por ec. (17b) $cx = P_2x = 0$ de donde $x = 0$; puesto que $c \neq 0$; y por teorema 2.5, C es inyectiva. Pero por el lema 2.1, dom$(C) \cong \mathcal{R}(C)$, es decir,

$$\mathcal{N}(A) = dom(C) \cong \mathcal{R}(C) = (cI - P_2)\mathcal{N}(A).$$

Con lo cual queda probado $\mathcal{N}(A) \cong (cI - P_2)\mathcal{N}(A)$. Así completamos la prueba de la parte I.

Parte II: En segundo lugar mostremos que las siguientes afirmaciones son ciertas

i′) $(I - P_1)\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}(A)$

ii′) $(cI - P_2)\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}$, para alguna $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Veamos $(I - P_1)\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}(A)$. En efecto, sea $y \in (I - P_1)\mathcal{N}$; así que existe $x \in \mathcal{N}$ tal que $y = (I - P_1)x$. Como $P_1y = P_1(I - P_1)x = (P_1 - P_1^2)x = (P_1 - P_1)x = 0$ entonces $y \in \mathcal{N}(P_1) = dom(A)$.

Ahora, como $x \in \mathcal{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} (c_1P_1 + c_2P_2)x = 0 &\Longrightarrow c_1P_1x + c_2P_2x = 0 \\ &\Longrightarrow c_1P_1x = -c_2P_2x. \end{aligned} \tag{18}$$

De la ec. (18) se sigue que

$$\begin{aligned} P_1x &= -\frac{c_2}{c_1}P_2x; \\ P_2x &= -\frac{c_1}{c_2}P_1x; \\ P_1P_2x &= -P_1\left(\frac{c_1}{c_2}P_1x\right) = -\frac{c_1}{c_2}P_1^2x = -\frac{c_1}{c_2}P_1x; \\ P_2P_1x &= -P_2\left(\frac{c_2}{c_1}P_2x\right) = -\frac{c_2}{c_1}P_2^2x = -\frac{c_2}{c_1}P_2x; \\ P_1P_2P_1x &= -P_1\left(\frac{c_2}{c_1}P_2x\right) = -\frac{c_2}{c_1}(P_1P_2x) = -\frac{c_2}{c_1}\left(-\frac{c_1}{c_2}P_1x\right) = P_1x. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
Ay =&(I-P_1)P_2y\\
=&(I-P_1)P_2(I-P_1)x && \text{pues } y=(I-P_1)x\\
=&P_2x-P_2P_1x-P_1P_2x+P_1P_2P_1x\\
=&P_2x-\left(-\frac{c_2}{c_1}P_2x\right)-\left(-\frac{c_1}{c_2}P_1x\right)+(P_1x)\\
=&P_2x+\frac{c_2}{c_1}P_2x+\frac{c_1}{c_2}P_1x+P_1x\\
=&\left(\frac{c_1+c_2}{c_1}\right)P_2x+\left(\frac{c_1+c_2}{c_2}\right)P_1x\\
=&\left(\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}\right)(c_1P_1+c_2P_2)\,x\\
=&0 && \text{pues } x\in\mathcal{N}.
\end{aligned}$$

De modo que $y\in\mathcal{N}(A)$ y así queda probado que $(I-P_1)\mathcal{N}\subseteq\mathcal{N}(A)$.

Ahora probemos *ii′*); tomemos $c=1+\frac{c_1}{c_2}$; y veamos que $(cI-P_2)\mathcal{N}(A)\subseteq\mathcal{N}$. En efecto: sea $y\in(cI-P_2)\mathcal{N}(A)$, de modo que existe $x\in\mathcal{N}(A)$ tal que $y=(cI-P_2)x$.

Ahora, como $x\in\mathcal{N}(A)$, por el Lema 4.2 tenemos que $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}[(I-P_1)P_2]\cap\mathcal{N}(P_1)$, entonces $x\in\mathcal{N}[(I-P_1)P_2]$ y $x\in\mathcal{N}(P_1)$; así $(I-P_1)\,P_2x=0$ y $P_1x=0$ entonces

$$P_2x=P_1P_2x \text{ y } P_1x=0. \tag{20}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
(c_1P_1+c_2P_2)y &= (c_1P_1+c_2P_2)(cI-P_2)x && \text{pues } y=(cI-P_2)x\\
&= c_1c\,(P_1x)-c_1\,(P_1P_2x)-c_2\left(P_2^2x\right)+c_2c\,(P_2x)\\
&= c_1c(0)-c_1\,(P_2x)-c_2\,(P_2x)+c_2c\,(P_2x) && \text{por ec. (20)}\\
&= (c_2c)P_2x-(c_1+c_2)P_2x\\
&= (c_1+c_2)P_2x-(c_1+c_2)P_2x && \text{pues } c=1+\frac{c_1}{c_2}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

De donde $y\in\mathcal{N}(c_1P_1+c_2P_2)=\mathcal{N}$. Hemos probado que $(cI-P_2)\mathcal{N}(A)\subseteq\mathcal{N}$ para $c=1+\frac{c_1}{c_2}$. Y de esta manera terminamos la prueba de la parte II.

Ahora para concluir la prueba del teorema, tenemos por las partes I y II que

i) $\mathcal{N}\cong(I-P_1)\mathcal{N}$

ii) $\mathcal{N}(A)\cong(cI-P_2)\mathcal{N}(A),\ \ \forall c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

i′) $(I-P_1)\mathcal{N}\subseteq\mathcal{N}(A)$

ii′) $(cI-P_2)\mathcal{N}(A)\subseteq\mathcal{N}$, para alguna $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Así que $\mathcal{N} \cong (I - P_1)\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}(A)$ y además $\mathcal{N}(A) \cong (cI - P_2)\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}$, y por lo tanto $\mathcal{N}(A) \cong \mathcal{N} = \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$. □

Teorema 4.2 *Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $c_1 + c_2 \neq 0$. Si A esta definida como en el lema 4.2, entonces la nulidad de $c_1P_1 + c_2P_2$ es constante, y está dada por:*

$$nul\,(c_1P_1 + c_2P_2) = nul\,(P_1 + P_2) = nul(A) = dim\,[\mathcal{N}\,[(I - P_1)\,P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)]\,. \tag{21}$$

En particular, $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular, si y sólo si, $P_1 + P_2$ es no singular.

Demostración: Por el teorema 4.1 $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) \cong \mathcal{N}(A)$. Pero por el Teorema 2.4

$$nul\,(c_1P_1 + c_2P_2) = nul(A). \tag{22}$$

Para el caso cuando $c_1 = 1 = c_2$ en el teorema 4.1, se tiene que $\mathcal{N}(1P_1 + 1P_2) \cong \mathcal{N}(A)$; es decir, $\mathcal{N}(P_1 + P_2) \cong \mathcal{N}(A)$, y por teorema 2.4,

$$nul(P_1 + P_2) = nul(A) \tag{23}$$

Y como por el lema 4.2, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)$ entonces

$$nul(A) = dim\,[\mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)]\,. \tag{24}$$

Luego de las ecuaciones (22), (23) y (24) se obtiene (21).

Ahora bien, $c_1P_1 + c_2P_2$ es no singular, es decir, $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) = \{0\}$, osea que, $nul\,(c_1P_1 + c_2P_2) = 0 = nul\,(P_1 + P_2)$, es decir, $\mathcal{N}(P_1 + P_2) = \{0\}$, esto es, $P_1 + P_2$ es no singular. □

Teorema 4.3 *Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $c_1 + c_2 \neq 0$. Si A esta definida como en el lema 4.2, entonces el rango de $c_1P_1 + c_2P_2$ es constante, y está dado por:*

$$\begin{aligned} rk(c_1P_1 + c_2P_2) &= rk(P_1 + P_2) = rk(P_1) + rk(A) = rk(P_1) + rk\,[(I - P_1)P_2(I - P_1)] \\ &= n - dim\,[\mathcal{N}\,[(I - P_1)P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)]\,. \end{aligned}$$

Demostración: Por el teorema 2.3 y el teorema 4.2 tenemos que

$$rk(c_1P_1 + c_2P_2) = n - nul(c_1P_1 + c_2P_2) = n - nul(P_1 + P_2) = rk(P_1 + P_2),$$

es decir,

$$rk(c_1P_1 + c_2P_2) = rk(P_1 + P_2). \tag{25}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} A : \mathcal{N}(P_1) &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto Ax = (I - P_1)P_2x \end{aligned}$$

Por el teorema 2.3 se sigue que

$$\begin{aligned} rk(A) + nul(A) = nul(P_1) &\Longrightarrow rk(A) = nul(P_1) - nul(A) \Longrightarrow rk(A) = (n - rk(P_1)) - nul(A) \\ &\Longrightarrow rk(A) + rk(P_1) = n - nul(A) \end{aligned} \tag{26}$$

Ahora combinando el teorema 2.3, con el teorema 4.2 y la ecuación (26) tenemos que

$$rk(P_1 + P_2) = n - nul(P_1 + P_2) = n - nul(A) = rk(A) + rk(P_1)$$

de modo que

$$rk(P_1 + P_2) = rk(A) + rk(P_1). \tag{27}$$

Luego del lema 4.2 tenemos que $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}\left[(I - P_1)P_2(I - P_1)\right]$. Así,

$$rk(P_1) + rk(A) = rk(P_1) + rk\left[(I - P_1)P_2(I - P_1)\right]. \tag{28}$$

Nuevamente del lema 4.2 tenemos que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left[(I - P_1)P_2\right] \cap \mathcal{N}(P_1)$, y combinando esto con la ecuación (26) se tiene que

$$rk(A) + rk(P_1) = n - nul(A) = n - dim\left[\mathcal{N}\left[(I - P_1)P_2\right] \cap \mathcal{N}(P_1)\right]$$

entonces

$$rk(A) + rk(P_1) = n - dim\left[\mathcal{N}\left[(I - P_1)P_2\right] \cap \mathcal{N}(P_1)\right]. \tag{29}$$

Así, por las ecuaciones (25), (27), (28) y (29) concluimos la prueba del teorema. □

Referencias

[1] J. Groβ, G. Trenkler, *Nonsingularity of the difference of two oblique projectors*, SIAM J. Matrix Anal. Applications. 21 (1999) 390-395.

[2] G. Marsaglia, G.P.H. Styan, *Equalities and inequalities for ranks of matrices*, Linear and Multilinear Algebra 2 (1974) 269-292.

[3] J.J. Koliha, V. Rakočević, I. Straškrabra, *The difference and sum of projectors*, Linear Algebra Applications. 388 (2004) 279-288.

[4] J.K. Baksalary, O.M.Baksalary, *Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices*, Linear Algebra Applications. 388 (2004) 25-29.

[5] J.J. Koliha, V. Rakočević, *The nullity and rank of linear combinations of idempotent matrices*, Linear Algebra and its Applications. 418 (2006) 11-14.

[6] S. I. Grossman, *Algebra lineal*, SIAM, Editorial Mc Graw Hill, University of MOntana, 1993.

Para citar este artículo: Carlos de Oro Aguado, 2016, Una caracterización para la nulidad y el rango de combinaciones lineales de dos matrices idempotentes. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA